

# Maximum de vraisemblance - Solutions

## Données

Le tableau de données `thermal_range.csv` représente le résultat d'une expérience visant à déterminer l'effet de la température (*temp*) sur le nombre d'oeufs (*num\_eggs*) produits par une espèce de moustique. Trois réplicats ont été mesurés pour des valeurs de température entre 10 et 32 degrés Celsius.

```
therm <- read.csv("../donnees/thermal_range.csv")
head(therm)
```

```
##   temp num_eggs
## 1    10        1
## 2    10        1
## 3    10        2
## 4    12        4
## 5    12        4
## 6    12        6
```

## 1. Modèle de Poisson

Nous supposons que le nombre moyen d'oeufs produits suit une fonction gaussienne centrée sur une température optimale. (Cette fonction a la même forme qu'une distribution normale, mais il ne s'agit pas d'une probabilité).

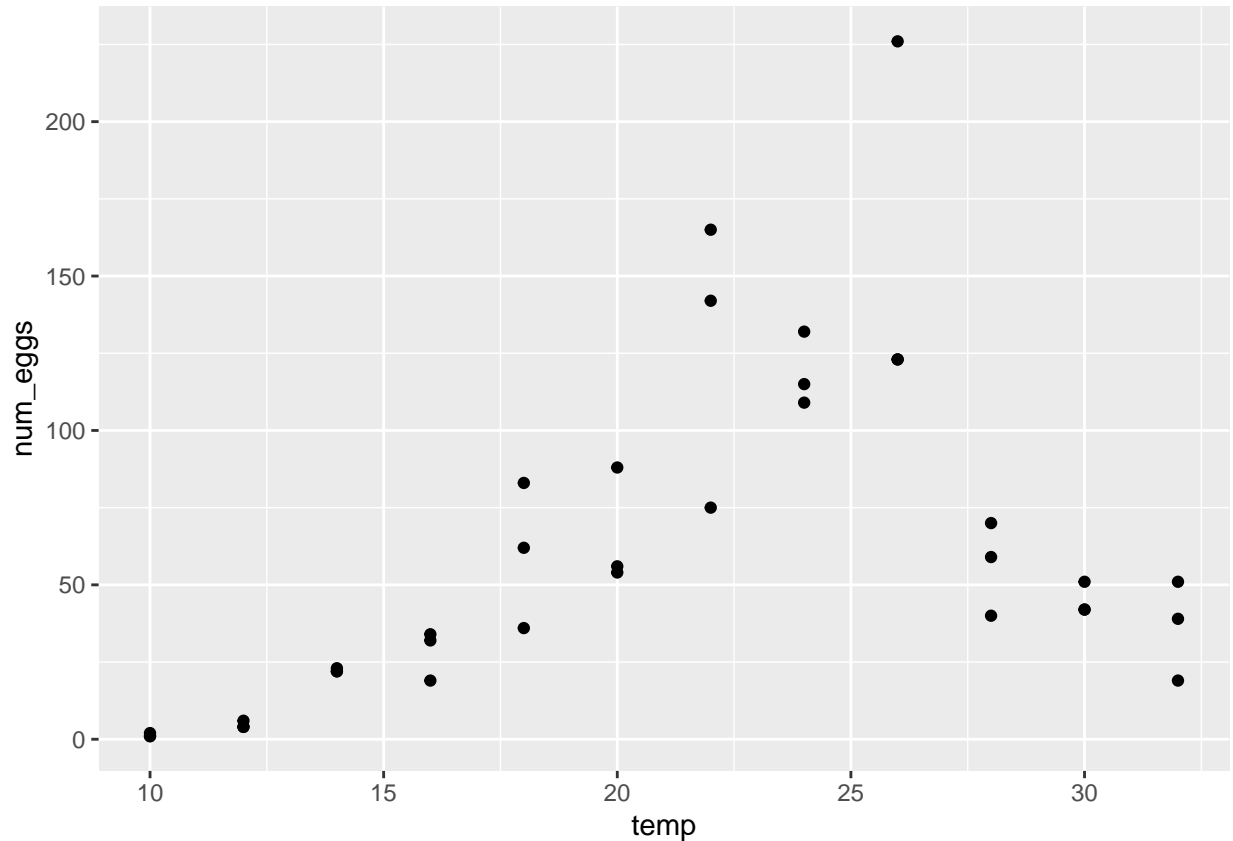
$$N = N_o \exp\left(-\frac{(T - T_o)^2}{\sigma_T^2}\right)$$

Dans cette équation,  $N$  est le nombre moyen d'oeufs produits pour une température  $T$ ,  $T_o$  est la température optimale,  $N_o$  est le nombre d'oeufs produits à  $T_o$  et  $\sigma_T$  représente la tolérance (plus  $\sigma_T$  est élevé, plus la production décroît lentement autour de l'optimum).

- a) Produisez un graphique de *num\_eggs* vs. *temp* pour ce jeu de données. En vous fiant à ce graphique, répondez aux questions suivantes.
- Le nombre d'oeufs semble-t-il atteindre un maximum avec une décroissance symétrique des deux côtés de ce maximum, tel que prévu par l'équation ci-dessus?
  - La variance entre les réplicats semble-t-elle homogène?

## Solution

```
library(ggplot2)
ggplot(therm, aes(x = temp, y = num_eggs)) +
  geom_point()
```



Le nombre d'oeufs semble atteindre un maximum autour de 25 degrés. La variance ne semble pas homogène, étant plus grande pour les températures où le nombre d'oeufs est plus grand.

- b) Pour modéliser ces données, nous utiliserons une distribution de Poisson, dont la moyenne  $\lambda$  correspond au  $N$  calculé selon l'équation ci-dessus.

Pourquoi est-il préférable ici d'utiliser une distribution de Poisson plutôt qu'une distribution normale pour représenter la variation aléatoire du nombre d'oeufs autour de la valeur moyenne prédite?

### Solution

Il s'agit de données de comptage (nombres entiers  $> 0$ ) et leur variance semble augmenter avec la moyenne, comme le prévoit la distribution de Poisson.

- c) Créez une fonction en R pour calculer l'opposé de la log-vraisemblance du nombre d'oeufs observé en fonction des paramètres du modèle  $N_o$ ,  $T_o$  et  $\sigma_T$ . *Note:* La fonction `dpois(y, lambda, log = TRUE)` permet de calculer le log de la probabilité d'un vecteur de données  $y$  suivant une distribution de Poisson avec des valeurs moyennes `lambda`.

### Solution

```
temp_nll <- function(N_o, T_o, sigma_T) {
  mu <- N_o * exp(-((therm$t-T_o)/sigma_T)^2)
  -sum(dpois(therm$num_eggs, lambda = mu, log = TRUE))
}
```

- d) Utilisez la fonction `mle2` pour estimer les trois paramètres du modèle selon le maximum de vraisemblance.

Pour ce problème, il est nécessaire de spécifier des bornes pour chaque paramètre, afin d'éviter que l'optimisateur ne s'éloigne trop des valeurs plausibles. Dans la fonction `mle2`, les bornes inférieures et

supérieures sont données par les argument `lower` et `upper`, ex.: `mle2(..., start = list(...), lower = c(no = 1, to = 5, s_t = 1), upper = c(...))`. Notez que ces arguments sont spécifiés par un vecteur `c(...)` tandis que `start` (les valeurs initiales) sont spécifiées par une liste.

Vous pouvez essayer différentes valeurs pour les bornes, cependant les bornes inférieures de  $N_o$  et  $\sigma_T$  devraient être au moins 1, la borne supérieure de  $\sigma_T$  ne devrait pas trop dépasser l'étendue (max-min) des températures testées; de même, les bornes pour  $T_o$  devraient être des valeurs réalistes de la température.

*Note:* Vous pouvez ignorer l'avertissement *Warning: bounds can only be used with method L-BFGS-B (or Brent)*. Cependant, si vous obtenez une erreur, ré-essayez en ajustant les bornes des paramètres.

### Solution

```
library(bbmle)

## Loading required package: stats4

res <- mle2(temp_nll, start = list(N_o = 50, T_o = 20, sigma_T = 2),
           lower = c(N_o = 1, T_o = 0, sigma_T = 1),
           upper = c(N_o = 1000, T_o = 50, sigma_T = 20))

## Warning in optim(par = c(N_o = 50, T_o = 20, sigma_T = 2), fn = function (p) :
## bounds can only be used with method L-BFGS-B (or Brent)

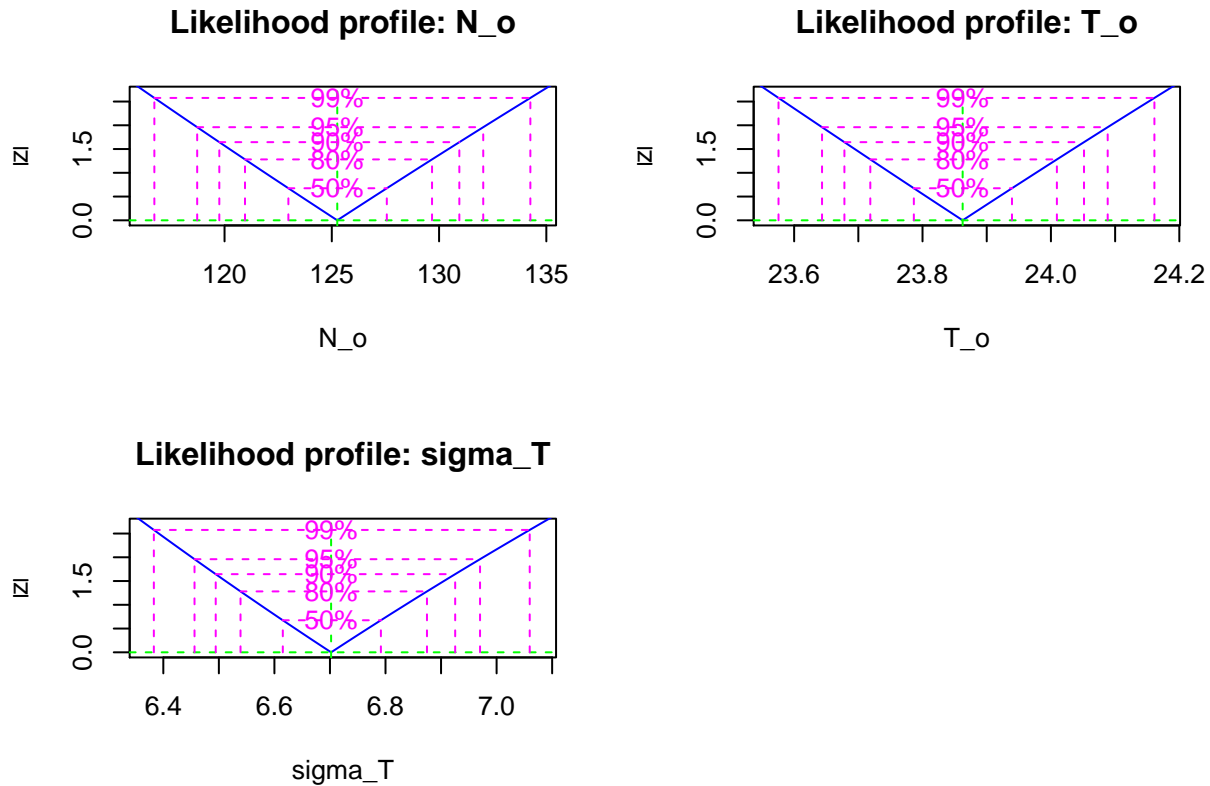
res

##
## Call:
## mle2(minuslogl = temp_nll, start = list(N_o = 50, T_o = 20, sigma_T = 2),
##      lower = c(N_o = 1, T_o = 0, sigma_T = 1), upper = c(N_o = 1000,
##      T_o = 50, sigma_T = 20))
##
## Coefficients:
##      N_o      T_o    sigma_T
## 125.254248  23.862510   6.702089
##
## Log-likelihood: -232.92
```

- e) Visualisez la vraisemblance profilée pour chacun des paramètres et calculez les intervalles de confiance à 95%. Croyez-vous que l'approximation quadratique serait bonne pour ces paramètres?

### Solution

```
pro <- profile(res)
plot(pro)
```



```
confint(pro)
```

```
##           2.5 %      97.5 %
## N_o      118.725387 132.059041
## T_o      23.643472 24.088414
## sigma_T  6.456217  6.970186
```

L'approximation quadratique serait bonne car la vraisemblance profilée pour chaque paramètre (après transformation racine carrée) suit une droite.

f) Comparons maintenant les prédictions du modèle aux données.

- Ajoutez une colonne au jeu de données pour les prédictions moyennes du modèle (les  $\lambda$  du modèle de Poisson pour chaque observation), obtenues en remplaçant les estimés du maximum de vraisemblance dans l'équation de  $N$  ci-dessus.
- Simulez 1000 jeux de données à partir de la distribution de Poisson avec les valeurs de  $\lambda$  estimées. Pour générer un jeu de données, utiliser `rpois(n, lambda)` où  $n$  est le nombre d'observations (le nombre de rangées du jeu de données original) et  $\lambda$  est la colonne des prédictions moyennes. Pour générer 1000 jeux de données, utilisez `replicate`. Le résultat de `replicate` devrait être une matrice de  $n$  rangées et 1000 colonnes (1 colonne par simulation).
- Pour obtenir un intervalle de prédiction à 95% pour chaque observation, calculez les quantiles appropriés pour chaque rangée de la matrice des simulations avec `apply`. Par exemple, `apply(sim_mat, 1, quantile, prob = 0.025)` applique la fonction `quantile` à chaque rangée de `sim_mat`, avec l'argument `prob` de `quantile` fixé à 0.025. Faites de même pour le quantile à  $p = 0.975$  et vous obtiendrez deux vecteurs pour les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle, que vous pouvez ajouter au jeu de données.

*Note:* Ces intervalles de prédiction supposent que les estimés des paramètres sont exacts et ignorent donc leur incertitude.

- À ce point-ci, en plus de `temp` et `num_eggs`, votre jeu de données contient trois colonnes représentant respectivement les prédictions moyennes, ainsi que les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de prédiction à 95% pour chaque observation. Ajoutez la prédiction moyenne et l'intervalle au graphique de `num_eggs` vs. `temp`. Ex.: Avec `ggplot`, vous pouvez ajouter `geom_line(aes(y = moy))` au graphique pour ajouter une ligne représentant la colonne `moy` des prédictions moyennes, même chose pour les deux lignes de l'intervalle.

À partir des résultats, pouvez-vous dire que le modèle représente bien la tendance générale des données ainsi que leur variation aléatoire autour de cette tendance?

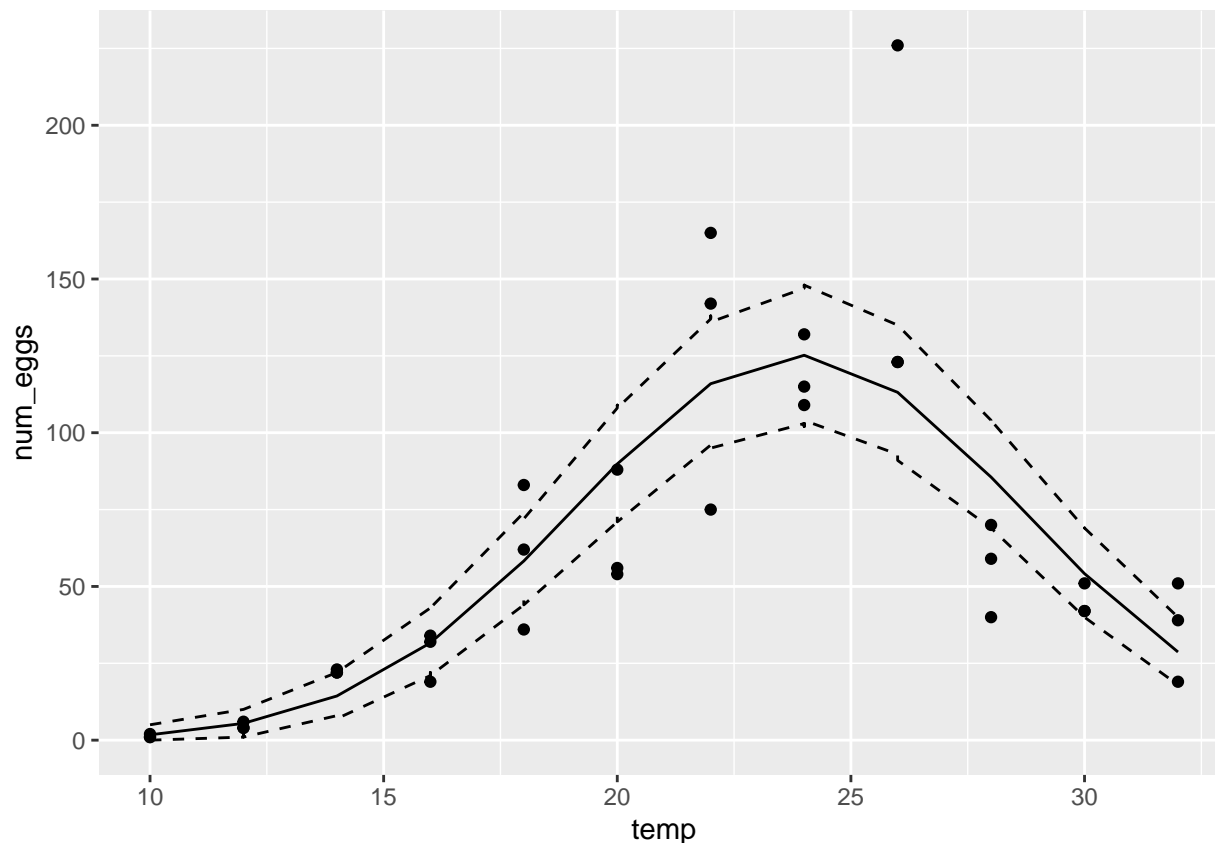
### Solution

```
# La fonction coef donne les estimés des paramètres
coef_pois <- coef(res)
coef_pois

##           N_o           T_o       sigma_T
## 125.254248  23.862510   6.702089

therm$mu <- coef_pois["N_o"] * exp(-((therm$t-coef_pois["T_o"])/coef_pois["sigma_T"])^2)
therm_sim <- replicate(1000, rpois(36, therm$mu))
therm$min <- apply(therm_sim, 1, quantile, prob = 0.025)
therm$max <- apply(therm_sim, 1, quantile, prob = 0.975)

library(ggplot2)
ggplot(therm, aes(x = temp, y = num_eggs)) +
  geom_point() +
  geom_line(aes(y = mu)) +
  geom_line(aes(y = min), linetype = "dashed") +
  geom_line(aes(y = max), linetype = "dashed")
```



Le modèle représente bien la tendance générale, mais sous-estime la variabilité. L'intervalle de prédiction à 95% contient à peine ~70% des observations (25/36).

## 2. Modèle binomial négatif

- a) Répétez les parties (c) à (f) du numéro précédent en utilisant une distribution binomiale négative au lieu de la distribution de Poisson pour la portion aléatoire du modèle.

*Rappel:* Dans la distribution de Poisson, la moyenne et la variance sont égales à  $\lambda$ . Dans la distribution binomiale négative, la moyenne est égale à  $\mu$  et la variance égale à  $\mu + \mu^2/\theta$ . Pour ce numéro, nous utiliserons  $k = 1/\theta$  comme paramètre. Si  $\theta > 0$ ,  $k$  quant à lui doit prendre une valeur supérieure ou égale à 0. Puisque la variance en fonction de  $k$  est  $\mu + k\mu^2$ , la distribution de Poisson correspond au cas  $k = 0$ .

Voici les principaux changements à apporter pour remplacer le modèle de Poisson par le modèle binomiale négatif:

- Ajoutez le paramètre  $k$  à la fonction de log-vraisemblance. Remplacez l'appel à `dpois` par `dnbinom(y, mu, size = 1/k, log = TRUE)` où `mu` est la prédiction moyenne, donc équivalente au `lambda` de `dpois`.
- Utilisez une borne inférieure de 0 pour le paramètre `k` dans `mle2`; la borne supérieure devrait être inférieure à 100.
- Pour simuler les données, remplacez `rpois` par `rnbinom` et spécifiez les argument `mu` (prédiction moyenne) et `size = 1/k`.

### Solution

```
# Fonction de vraisemblance, estimés et intervalles
temp_nll <- function(N_o, T_o, sigma_T, k) {
```

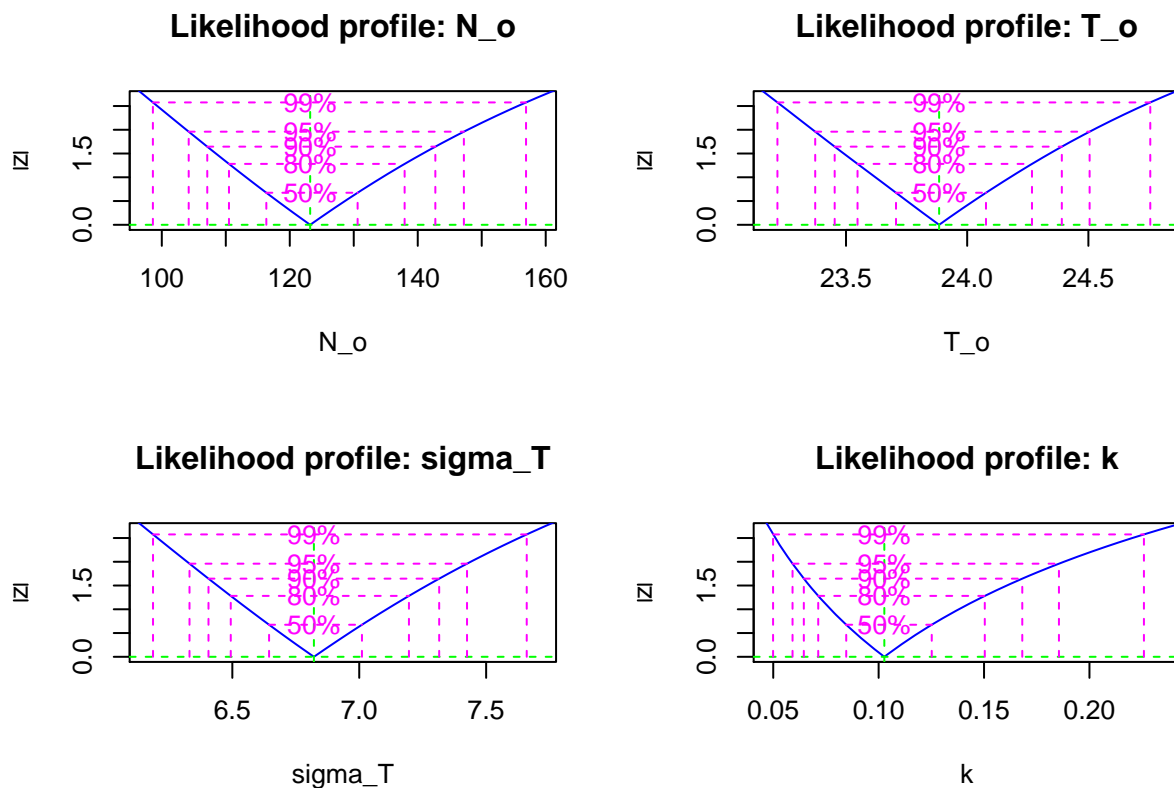
```

mu <- N_o * exp(-((therm$t-T_o)/sigma_T)^2)
-sum(dnbinom(therm$num_eggs, size = 1/k, mu = mu, log = TRUE))
}

res <- mle2(temp_nll, start = list(N_o = 50, T_o = 20, sigma_T = 1, k = 1),
        lower = c(N_o = 1, T_o = 0, sigma_T = 1, k = 0),
        upper = c(N_o = 1000, T_o = 50, sigma_T = 20, k = 10))
res

##
## Call:
## mle2(minuslogl = temp_nll, start = list(N_o = 50, T_o = 20, sigma_T = 1,
##     k = 1), lower = c(N_o = 1, T_o = 0, sigma_T = 1, k = 0),
##     upper = c(N_o = 1000, T_o = 50, sigma_T = 20, k = 10))
##
## Coefficients:
##      N_o      T_o    sigma_T      k
## 123.188369 23.884264  6.821416 0.102698
##
## Log-likelihood: -143.93
plot(profile(res))

```



```

confint(profile(res))

```

```

##           2.5 %      97.5 %
## N_o      104.20709233 147.2176826

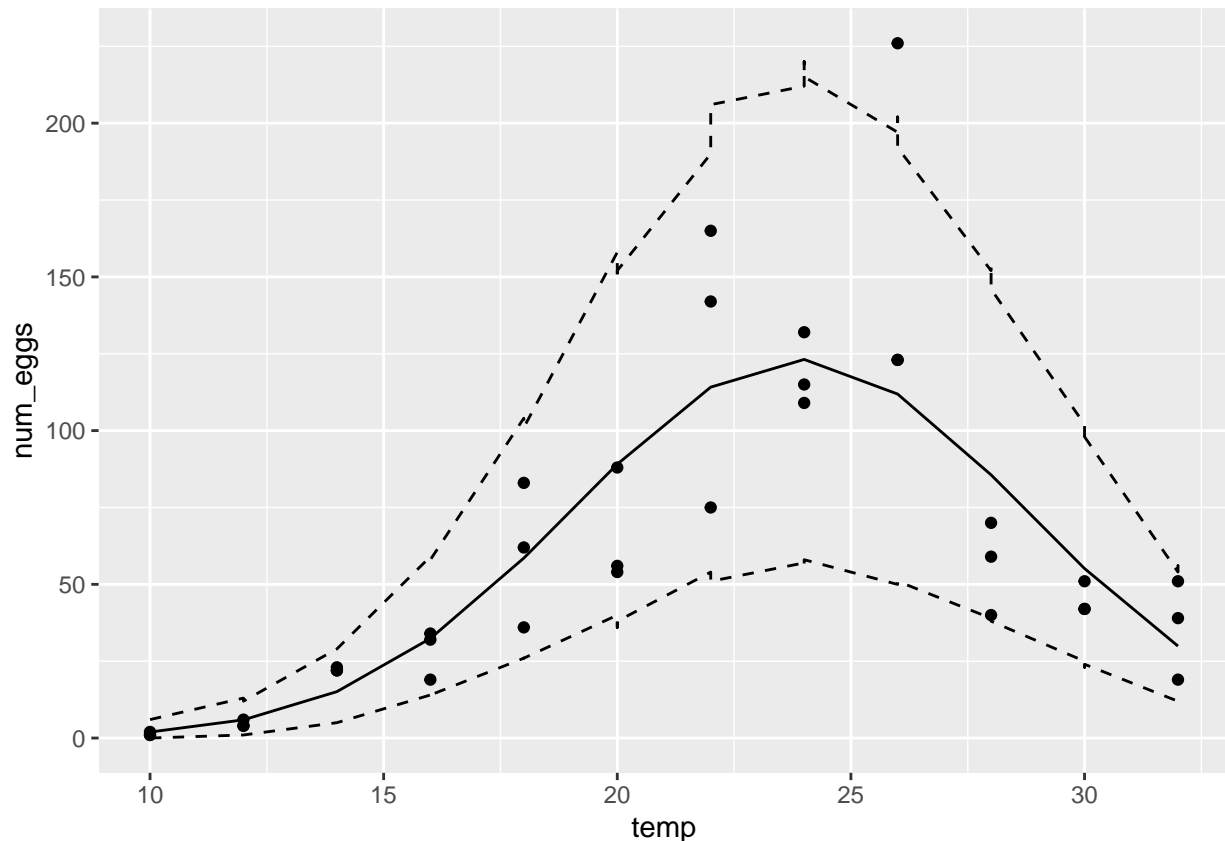
```

```
## T_o      23.37301405  24.5051418
## sigma_T  6.33138839   7.4248342
## k        0.05916351   0.1855639
```

La vraisemblance profilée des paramètres s'approche de l'approximation quadratique, sauf pour  $k$  où elle est non-quadratique et asymétrique.

```
# Prédiction selon les paramètres estimés
coef_nb <- coef(res)
therm$mu <- coef_nb["N_o"] * exp(-((therm$t-coef_nb["T_o"])/coef_nb["sigma_T"])^2)
therm_sim <- replicate(1000, rnbinom(36, mu = therm$mu, size = 1/coef_nb["k"]))
therm$min <- apply(therm_sim, 1, quantile, prob = 0.025)
therm$max <- apply(therm_sim, 1, quantile, prob = 0.975)

library(ggplot2)
ggplot(therm, aes(x = temp, y = num_eggs)) +
  geom_point() +
  geom_line(aes(y = mu)) +
  geom_line(aes(y = min), linetype = "dashed") +
  geom_line(aes(y = max), linetype = "dashed")
```



Ici l'intervalle de prédiction à 95% contient 35/36 points (97%).

- b) Serait-il correct d'utiliser le test du rapport de vraisemblance pour comparer le modèle de Poisson du numéro précédent au modèle binomial négatif?

### Solution

Le test du rapport de vraisemblance ne s'applique pas lorsque l'hypothèse nulle correspond à une limite des



valeurs possibles du paramètre. Ici, le modèle de Poisson correspond au modèle binomial négatif avec  $k = 0$ , qui est à la limite des valeurs possibles pour ce paramètre.

- c) Que vous répondiez oui ou non à (b), les résultats montrent-ils clairement si un modèle binomial négatif est justifié ou non (par rapport au modèle plus simple de Poisson) pour ces données?

**Solution**

Oui, les prédictions du modèle sont plus en accord avec les observations et la log-vraisemblance du modèle binomial négatif (-144) est beaucoup plus élevée que celle du modèle de Poisson (-233).